Månadens problem – SEPTEMBER 2020

Lösningsförslag

1. (a) På den övre kulan verkar två krafter, en nedåtriktad tyngdkraft med storleken $F_\text{g} = mg = 10 \cdot 10^{-6} \cdot 9{,}82$ N $= 9{,}82 \cdot 10^{-5}$ N, och en uppåtriktad elektrisk kraft med storleken $F_\text{e} = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2} = 8{,}988 \cdot 10^9 \cdot \frac{(1{,}0 \cdot 10^{-9})^2}{0{,}010^2}$ N $= 8{,}99 \cdot 10^{-5}$ N.

   Resultanten till dessa krafter är riktad nedåt och har storleken $R = F_\text{g} - F_\text{e}$. Newtons andra lag ger kulans acceleration:

   $$a = \frac{R}{m} = \frac{F_\text{g} - F_\text{e}}{m} = \frac{(9{,}82 - 8{,}99) \cdot 10^{-5}}{10 \cdot 10^{-6}} \text{ m/s}^2 = 0{,}83 \text{ m/s}^2.$$

   (b) Vi låter x vara avståndet mellan kulorna då den övre kulan är i sitt jämviktsläge. I jämviktsläget balanseras tyngdkraften av den elektriska kraften, vilket ger

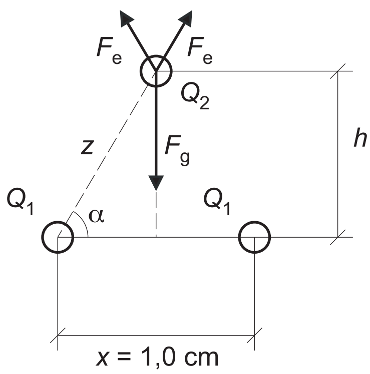
   $$k\frac{Q_1 Q_2}{x^2} = mg \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{kQ_1Q_2}{mg}} = \sqrt{\frac{8{,}988 \cdot 10^9 \cdot (1{,}0 \cdot 10^{-9})^2}{10 \cdot 10^{-6} \cdot 9{,}82}} \text{ m}$$
   $$= 0{,}0096 \text{ m}.$$

   Svar: (a) 0,83 m/s^2 (b) 9,6 mm ovanför den undre kulan.

2. (a) Vid jämvikt gäller

   $$mg = 2F_{\text{e},y} = 2 \cdot \frac{kQ_1^2}{z^2} \cdot \frac{h}{z},$$

   där $\frac{h}{z} = \sin\alpha$ och $\frac{1}{z^2} = \frac{\cos^2\alpha}{x^2/4}$ (se figuren nedan).



Detta ger oss ekvationen

$$mg = \frac{2kQ_1^2}{x^2/4}\cos^2\alpha\sin\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \frac{mgx^2}{8kQ_1^2} = \cos^2\alpha\sin\alpha.$$

Beräknar vi värdet av vänsterledet med våra värden får vi

$$\frac{mgx^2}{8kQ_1^2} = \frac{10\cdot 10^{-6}\cdot 9{,}82\cdot 0{,}010^2}{8\cdot 8{,}988\cdot 10^9\cdot(1{,}0\cdot 10^{-9})^2} = 0{,}13657.$$

Ekvationen vi behöver lösa kan alltså skrivas

$$0{,}13657 = \cos^2\alpha\sin\alpha.$$

Numerisk lösning, till exempel med Desmos, ger $\alpha_1 = 0{,}140$ rad, $\alpha_2 = 1{,}18$ rad. Det finns alltså två jämviktslägen. Vi får till slut

$$h_1 = \frac{x}{2}\tan\alpha_1 = \frac{0{,}010}{2}\cdot\tan 0{,}140 \text{ m} = 0{,}70\cdot 10^{-3} \text{ m},$$
$$h_2 = \frac{x}{2}\tan\alpha_2 = \frac{0{,}010}{2}\cdot\tan 1{,}18 \text{ m} = 12\cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

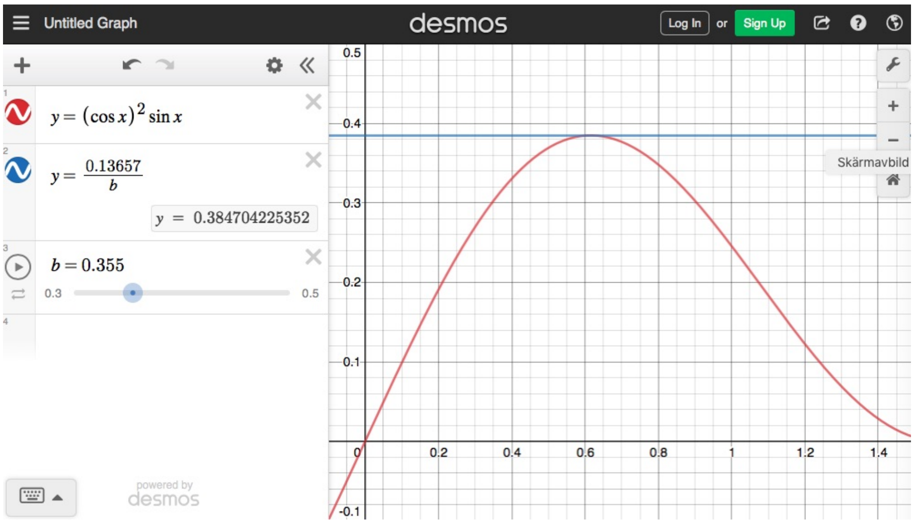
(b) Vi såg i (a)-uppgiften ovan att vid jämvikt gäller

$$\frac{mgx^2}{8kQ_1Q_2} = \cos^2\alpha\sin\alpha.$$

För tillräckligt små värden på Q_1 saknar denna ekvation lösning, och då finns det inte något jämviktsläge. Om vi låter $Q_2 = b$ nC och sätter in värden kan ekvationen skrivas

$$\frac{10\cdot 10^{-6}\cdot 9{,}82\cdot 0{,}010^2}{8\cdot 8{,}988\cdot 10^9\cdot 1{,}0\cdot 10^{-9}\cdot b\cdot 10^{-9}} = \cos^2\alpha\sin\alpha$$
$$\frac{0{,}13657}{b} = \cos^2\alpha\sin\alpha$$

Vi kan nu undersöka numeriskt, till exempel med Desmos, för vilka värden på parametern b som den här ekvationen har lösningar.



Vi ser då att om $b < 0{,}36$ så saknar ekvationen lösning, vilket innebär att den övre kulan måste laddas med åtminstone 0,36 nC för att det skall gå att hitta ett jämviktsläge.

Svar: (a) Det finns två möjligheter, $h = 0{,}70$ mm eller $h = 12$ mm. (b) 0,36 nC