Månadens problem – OKTOBER 2020

Lösningsförslag

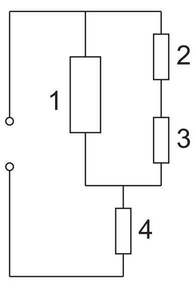
(a) Om vi räknar med att järns resistivitet är $0{,}096 \cdot 10^{-6}$ Ωm får vi trådens radie ur

$$R = \rho \frac{l}{A} = \rho \frac{l}{\pi r^2} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{\rho l}{\pi R}} = \sqrt{\frac{0{,}096 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}00}{\pi \cdot 3{,}34}} \text{ m} = 9{,}6 \cdot 10^{-5} \text{ m}.$$

(b) Kretsens totala resistans är $R = 3 \cdot 0{,}30 \cdot 3{,}34\ \Omega = 3{,}01\ \Omega$. Den utvecklade effekten är

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{5{,}0^2}{3{,}01} \text{ W} = 8{,}3 \text{ W}.$$

(c) Vi ritar ett schematiskt kopplingsschema där varje tråd representeras av ett motstånd:



Låt $R_2 = R_3 = R_4 = R$ $(= 0{,}30 \cdot 3{,}34\ \Omega = 1{,}002\ \Omega)$. Då är $R_1 = \sqrt{2}R$. Ersättningsresistansen till alla motstånd är

$$R_{\text{tot}} = R + \frac{\sqrt{2}R \cdot 2R}{\sqrt{2}R + 2R} = \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2}\right) R = 1{,}832\ \Omega.$$

Huvudströmmen är då

$$I_4 = \frac{5{,}0}{1{,}832} \text{ A} = 2{,}729 \text{ A},$$

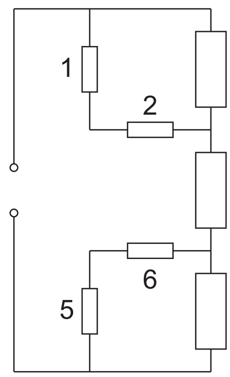
och spänningen över motstånd 2 och 3 är

$$U_{2,3} = 5{,}0 \text{ V} - I_4 R_4 = (5{,}0 - 2{,}729 \cdot 1{,}002) \text{ V} = 2{,}265 \text{ V}.$$

Sökta strömmen:

$$I_{2,3} = \frac{U_{2,3}}{R_2 + R_3} = \frac{2{,}265}{2 \cdot 1{,}002} \text{ A} = 1{,}13 \text{ A}.$$

(d) Vi ritar ett schematiskt kopplingsschema där varje tråd representeras av ett motstånd:



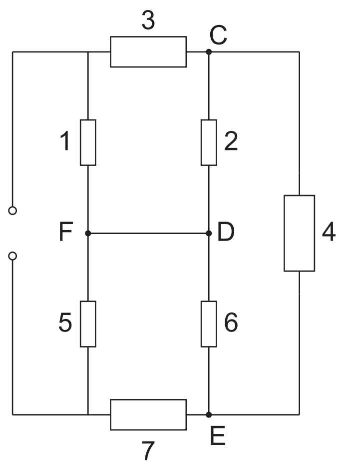
Här är $R_3 = R_4 = R_7 = R$ och $R_1 = R_2 = R_5 = R_6 = \frac{R}{\sqrt{2}}$. Ersättningsresistansen för motstånd 1 och 2 är $2 \cdot \frac{R}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}R$. Ersättningsresistansen för motstånd 1, 2 och 3:

$$R_{1,2,3} = \frac{\sqrt{2}R \cdot R}{\sqrt{2}R + R} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}R = (2 - \sqrt{2})R.$$

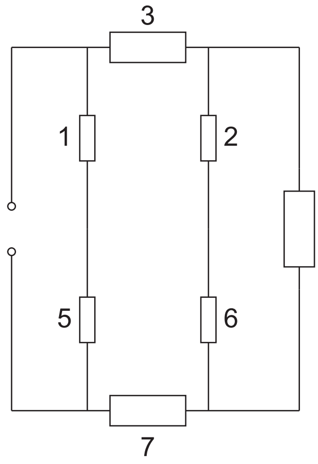
(I sista steget förlängde vi med $(\sqrt{2} - 1)$.) Eftersom ersättningsresistansen för motstånd 5, 6 och 7 är lika stor, är hela kretsens ersättningsresistans

$$R_{\text{tot}} = \Big((2 - \sqrt{2}) + 1 + (2 - \sqrt{2})\Big)R = (5 - 2\sqrt{2})R = (5 - \sqrt{8})R.$$

Om vi kopplar ihop trådarna i mitten kan vi rita ett schematiskt kopplingsschema så här:



Precis som innan är $R_3 = R_4 = R_7 = R$ och $R_1 = R_2 = R_5 = R_6 = \frac{R}{\sqrt{2}}$. Eftersom $R_2 = R_6$ är $U_{\text{CD}} = U_{\text{DE}} = \frac{U_{\text{CE}}}{2}$. Då måste också strömmen genom motstånd 6 vara lika stor som strömmen genom motstånd 2, vilker innebär att det inte går någon ström från F till C. Vi kan därför förenkla det schematiska kopplingsschemat:



Ersättningsresistansen för motstånd 2 och 6 (samt för motstånd 1 och 5) är $2 \cdot \frac{R}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}R$. Ersättningsresistansen för motstånd 2, 6 och 4:

$$R_{2,6,4} = \frac{\sqrt{2}R \cdot R}{\sqrt{2}R + R} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}R = (2-\sqrt{2})R.$$

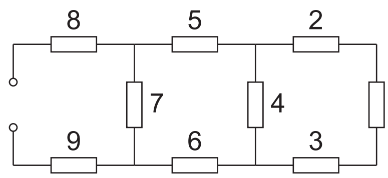
Ersättningsresistansen för motstånd 3, 7 och 2, 6 och 4:

$$R_{3,7,2,6,4} = R + R + (2-\sqrt{2})R = (4-\sqrt{2})R.$$

Hela kretsens ersättningsresistans är

$$R_{\text{tot}} = \frac{\sqrt{2}R \cdot (4-\sqrt{2})R}{\sqrt{2}R + (4-\sqrt{2})R} = \frac{(4\sqrt{2}-2)R^2}{4R} = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)R.$$

(e) Vi ritar ett schematiskt kopplingsschema där varje tråd representeras av ett motstånd med resistansen R:



Vi börjar sedan från höger och arbetar oss åt vänster. Ersättningsresistansen för motstånd 1–3 är $3R$. Ersättningsresistansen för motstånd 1–4:

$$R_{1-4} = \frac{R \cdot 3R}{R + 3R} = \frac{3R}{4}.$$

Ersättningsresistansen för motstånd 1–6:

$$R_{1-6} = 2R + \frac{3R}{4} = \frac{11R}{4}.$$

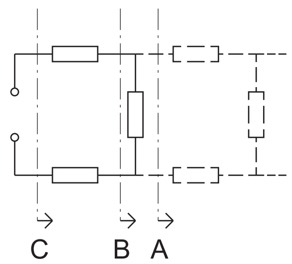
Ersättningsresistansen för motstånd 1–7:

$$R_{1-4} = \frac{R \cdot \frac{11R}{4}}{R + \frac{11R}{4}} = \frac{11R}{15}.$$

Hela kretsens ersättningsresistans:

$$R_{1-9} = 2R + \frac{11R}{15} = \frac{41R}{15}.$$

Hur blir det om vi har en oändligt lång stege? Vi ritar ett schematiskt kopplingsschema där varje tråd representeras av ett motstånd med resistansen R:



Till höger om strecket A i figuren finns det oändligt många motstånd, och vi kallar resistansen till höger om strecket A för R_∞. Då är resistansen till höger om strecket B

$$R_\mathrm{B} = \frac{R \cdot R_\infty}{R + R_\infty},$$

och resistansen till höger om strecket C är

$$R_\mathrm{C} = 2R + \frac{R \cdot R_\infty}{R + R_\infty}.$$

Men till höger om strecket C finns också oändligt många motstånd, så resistansen till höger om strecket C måste också vara R_∞. Alltså är $R_\mathrm{C} = R_\infty$, och vi får ekvationen

$$R_\infty = 2R + \frac{R \cdot R_\infty}{R + R_\infty}$$

Division med R i båda led och ytterligare division med R i täljare och nämnare i bråkuttrycket ger

$$\frac{R_\infty}{R} = 2 + \frac{\frac{R_\infty}{R}}{1 + \frac{R_\infty}{R}}.$$

Sätter vi nu $\frac{R_\infty}{R} = u$ får vi ekvationen

$$u = 2 + \frac{u}{1+u} \quad \Leftrightarrow \quad u^2 - 2u - 2 = 0,$$

som har den positiva lösningen $u = 1 + \sqrt{3}$. Alltså är den sökta resistansen

$$R_\infty = (1 + \sqrt{3})R.$$

Svar: (a) $9{,}6 \cdot 10^{-5}$ m (b) 8,3 W (c) 1,1 A (d) $(5 - \sqrt{8})R$ (e) $\frac{41}{15}R$