



## Månadens problem – NOVEMBER 2020

### Lösningsförslag

(a) Antalet protoner är

$$\frac{W_{\text{stråle}}}{W_{\text{proton}}} = \frac{W_{\text{k, tåg}}}{W_{\text{proton}}} = \frac{400 \cdot 10^3 \cdot (150/3,6)^2}{7 \cdot 10^{12} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}} = 3,1 \cdot 10^{14}.$$

(b) Klassiskt: Hastigheten fås ur

$$W_{\text{k}} = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2W_{\text{k}}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7 \cdot 10^{12} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}{1,67 \cdot 10^{-27}}} \text{ m/s} \\ = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ m/s}.$$

Relativistiskt: Vi bestämmer först gammafaktorn:

$$E_{\text{k}} = (\gamma - 1)mc^2 \Rightarrow \gamma = \frac{E_{\text{k}}}{mc^2} + 1 = \frac{7 \cdot 10^{12} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot (3,00 \cdot 10^8)^2} + 1 \\ = 7462$$

Hastigheten fås sedan ur

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \Rightarrow v = \left( \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \right) c = \left( \sqrt{1 - \frac{1}{7462^2}} \right) c \\ = 0,999999991c \\ = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

(c) Tiden enligt en observatör på CERN är

$$\Delta t = \frac{27 \cdot 10^3}{3,0 \cdot 10^8} \text{ s} = 9,0 \cdot 10^{-5} \text{ s}.$$

Under ett varv kommer protonen att åldras mindre än observatören. Tiden enligt protonen är

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{9,0 \cdot 10^{-5} \text{ s}}{7462} = 1,2 \cdot 10^{-8} \text{ s}.$$

(d) Den totala energin i protonstrålen är

$$W_{\text{stråle}} = \frac{400 \cdot 10^3 \cdot (150/3,6)^2}{2} \text{ J} = 3,47 \cdot 10^8 \text{ J}.$$

Om vi antar att all denna energi omvandlas till inre energi i en cylindrisk bit grafit med massan  $m$  som värms till smältpunkten och sedan smälter får vi

$$mc\Delta T + l_s m = W_{\text{stråle}}.$$

Vi låter massan grafit som värms och smälter vara  $x$  kg. Om vi räknar med att grafit har smälttemperaturen<sup>1</sup>  $3600^\circ\text{C}$ , specifika värmekapaciteten<sup>2</sup>  $0,71 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$  och smältentalpiten<sup>3</sup>  $9,74 \text{ MJ/kg}$  får vi

$$0,71 \cdot 10^3 \cdot x \cdot (3600 - 20) + 9,74 \cdot 10^6 \cdot x = 3,47 \cdot 10^8 \quad \Leftrightarrow \quad x = 28,3$$

Protonspårets längd,  $h$ , fås sedan ur

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi r^2 h} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{m}{\rho \pi r^2} = \frac{28,3}{2,25 \cdot 10^3 \cdot \pi \cdot (8 \cdot 10^{-6})^2} \text{ m} \\ = 6,3 \cdot 10^7 \text{ m},$$

där vi använt att grafits densitet är  $2,25 \text{ g/cm}^3$  och att strålen är  $16 \mu\text{m}$  bred, så att radien är  $8 \mu\text{m}$ . Enligt den här uppskattningen blir protonspåret längre än jordens diameter ( $1,3 \cdot 10^7 \text{ m}$ ), så strålen behöver spridas ut.

(Om vi räknar med värdet  $17 \text{ MJ/kg}$  på smältentalpiten för grafit får vi istället att protonspåret blir  $3,9 \cdot 10^7 \text{ m}$  långt.)

**Svar:** (a)  $3,1 \cdot 10^{14}$  st (b)  $3,7 \cdot 10^{10} \text{ m/s}$  (klassiskt),  $0,999999991c$  (relativistiskt)  
(c)  $9,0 \cdot 10^{-5} \text{ s}$  respektive  $1,2 \cdot 10^{-8} \text{ s}$  (d)  $6,3 \cdot 10^7 \text{ m}$

<sup>1</sup>Från <https://tinyurl.com/y5seqkfc> (IAEA Nuclear Graphite Knowledge Base, What Is Graphite)

<sup>2</sup>Från *Formler och Tabeller i Fysik, Matematik och Kemi* av Ekholm-Fraenkel-Hörbeck

<sup>3</sup>Från [https://en.wikipedia.org/wiki/Heats\\_of\\_fusion\\_of\\_the\\_elements\\_\(data\\_page\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Heats_of_fusion_of_the_elements_(data_page))