Månadens problem – OKTOBER 2021

Lösningsförslag

a) På det lutande planet har normalkraften på klossen storleken $mg\cos\alpha$, så friktionskraftens storlek är där $\mu\, mg\sin\alpha$. Sträckan som klossen glider på det horisontella underlaget är $(L - l\cos\alpha)$, och höjden ovanför horisontalplanet varifrån klossens släpps är $l\sin\alpha$. Energipincipen ger då ($W_{\text{p}} = W_{\text{friktion}}$)

$$mg\,l\sin\alpha = \mu\, mg\cos\alpha\cdot l + \mu\, mg\cdot(L - l\cos\alpha),$$

vilket kan förenklas till

$$l\sin\alpha = \mu L.$$

Vi får alltså

$$\alpha = \arcsin\frac{\mu L}{l} = \arcsin\frac{0{,}20\cdot 3{,}0}{1{,}0} = 36{,}9^\circ.$$

b) Vi använder energiprincipen för att bestämma klossens fart vid det lutande planet slut:

$$mg\,\sin\alpha = \frac{mv^2}{2} \quad\Leftrightarrow\quad v = \sqrt{2gl\sin\alpha}$$

Accelerationen längs med det lutande planet är konstant, så tiden klossen tillbringar på det lutande planet är (använd $s = \frac{v_0+v}{2}t$ med $v_0 = 0$)

$$\Delta t_1 = \frac{2\cdot l}{\sqrt{2gl\sin\alpha}}$$

På horisontalplanet rör sig klossen sträckan $(L - l\cos\alpha)$ med den konstanta farten $\sqrt{2gl\sin\alpha}$. Tiden det tar för klossen att röra sig fram till P är

$$\Delta t_2 = \frac{L - l\cos\alpha}{\sqrt{2gl\sin\alpha}}$$

Totala tiden är alltså

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{2\cdot l}{\sqrt{2gl\sin\alpha}} + \frac{L - l\cos\alpha}{\sqrt{2gl\sin\alpha}} = \frac{L + l(2-\cos\alpha)}{\sqrt{2gl\sin\alpha}}$$

Insättning av värden ger

$$\Delta t = \frac{5{,}0 - 1{,}0\cdot\cos\alpha}{\sqrt{19{,}64\cdot\sin\alpha}}.$$

Vi ritar $y = \frac{5-\cos x}{(19.64\cdot\sin x)^{0.5}}$ med hjälp av Desmos (eller annan grafritare) och får att $y_{\min} \approx 1{,}084$ då $x \approx 1{,}189$. Sökta vinkeln blir då i grader

$$\frac{1{,}189}{2\pi}\cdot 360^\circ = 68{,}1^\circ.$$

Svar: (a) 36,9° (b) 68,1°