Månadens problem – APRIL 2022

Lösningsförslag

Vi tar först fram ett uttryck för kastvidden, s_x, när en boll kastas iväg med hastigheten v_0 riktad vinkeln α upp från horisontalplanet.

Kasttiden T fås ur (använd $v_y = v_{0y} + at$ med $v_y = -v_{0y}$ och $a = -g$)

$$-v_{0y} = v_{0y} - gT \quad \Leftrightarrow \quad T = \frac{2v_{0y}}{g}.$$

Kastvidden kan då skrivas

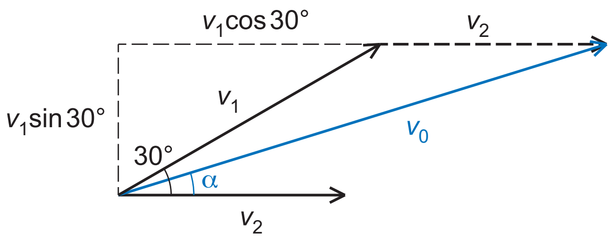
$$s_x = v_{0x}T = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}.$$

Insättning av $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$ och $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$ ger till slut

$$s_x = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}. \tag{1}$$

a) Ur figuren nedan ser vi att

$$\sin\alpha = \frac{v_1 \sin 30^\circ}{v_0} \quad \text{och} \quad \cos\alpha = \frac{v_2 + v_1 \cos 30^\circ}{v_0}.$$



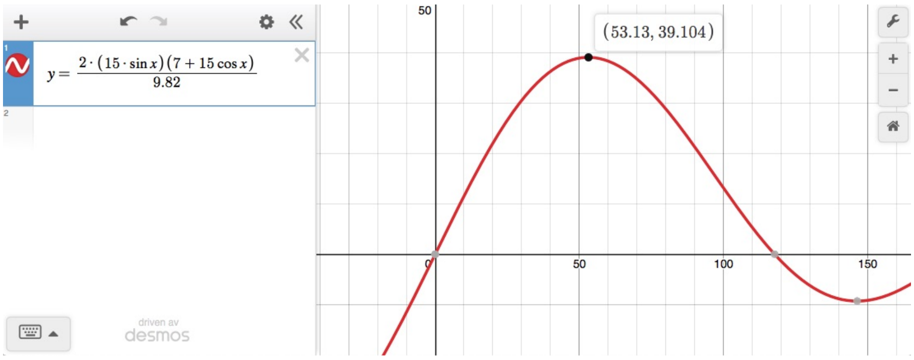
Insättning av dessa uttryck i (1) ger

$$\begin{aligned} s_x &= \frac{2 \cdot v_1 \sin 30^\circ \cdot (v_2 + v_1 \cos 30^\circ)}{g} \\ &= \frac{2 \cdot 15 \cdot \sin 30^\circ \cdot (7{,}0 + 15 \cdot \cos 30^\circ)}{9{,}82}\ \text{m} = 31\ \text{m}. \end{aligned} \tag{2}$$

b) Vi låter vinkeln mellan hastighetsvektorerna vara x. Om vi byter 30° i uttrycket (2) ovan mot x får vi ett uttryck för kastvidden som vi hitta största värde för:

$$s_x = \frac{2 \cdot 15 \cdot \sin x \cdot (7{,}0 + 15 \cdot \cos x)}{9{,}82} \text{ m.}$$

Vi använder Desmos och ser att kastvidden blir som störst, 39,1 m, då $x \approx 53{,}1°$.



c) När vinkeln mellan hastighetsvektorerna förändras förändras *både* kastvinkeln α och begynnelsehastigheten v_0 (se figuren ovan). Så är inte fallet vid stillastående kast då begynnelsehastigheten är densamma för alla kastvinklar.

Svar: a) 31 m b) 53°, 39 m c) Se ovan.