Problemsamling 2

Lösningsförslag

1. [Kval 2004-6] I vattnet finns joner med laddningen q som rör sig med vattnets hastighet. Dessa laddningar påverkas av en magnetisk kraft på grund av det jordmagnetiska fältet. Det byggs då upp ett elektriskt fält mellan plattorna som ger en motsatt riktad elektrisk kraft på laddningarna. Jämvikt fås då dessa fält påverkar laddningarna med lika stora men motsatt riktade krafter. Den magnetiska kraften ges av

$$F_{\text{magnetisk}} = qvB$$

där v är jonernas dvs vattnets hastighet, B det jordmagnetiska fältets vertikala komposant (40 μT) som är vinkelrät mot vattnets "horisontella" rörelse och q är jonens laddning. Det elektriska fältet som byggs upp mellan flodens stränder ges av $E = \frac{U}{d}$ som ger den elektriska kraften

$$F_{\text{elektrisk}} = q\frac{U}{d}$$

där U är den uppmätta spänningen 20 mV och d är flodens bredd 300 m. Vid jämvikt gäller

$$qvB = q\frac{U}{d}$$

som ger

$$v = \frac{U}{Bd} = \frac{0{,}020}{40 \cdot 10^{-6} \cdot 300} \text{ m/s} = 1{,}7 \text{ m/s}$$

Svar: Vattnets hastighet var 1,7 m/s.

2. [Kval 2010-4] Vi behöver först bestämma potatisens fart när den lämnar röret. Sedan kan vi ta reda på potatisens acceleration i röret och därefter använda Newtons andra lag på potatisen i röret.

Vi räknar i y-led för att bestämma falltiden:

$$y = \frac{at^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}56}{9{,}82}} \text{ s} = 0{,}34 \text{ s}.$$

Räkning i x-led ger utgångsfarten:

$$x = vt \Rightarrow v = \frac{x}{t} = \frac{6{,}9 \text{ m}}{0{,}34 \text{ s}} = 20{,}4 \text{ m/s}.$$

Om vi antar konstant acceleration i röret, fås denna acceleration ur

$$2as = v^2 - v_0^2 \Rightarrow a = \frac{v^2}{2s} = \frac{20{,}4^2}{2 \cdot 1{,}1} \text{ m/s}^2 = 189{,}7 \text{ m/s}^2.$$

Newtons andra lag på potatisen ger

$$p_0 \cdot A - p \cdot A = ma,$$

där p_0 är lufttrycket utanför röret, p är trycket inne i röret, A är rörets tvärsnittsarea och m är potatisens massa. Löser vi ut p får vi

$$p = p_0 - \frac{ma}{A} = 1{,}01 \cdot 10^5 \text{ Pa} - \frac{0{,}024 \text{ kg} \cdot 189{,}7 \text{ m/s}^2}{\pi \cdot (1{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2} = 95 \cdot 10^3 \text{ Pa}.$$

Vi har i beräkningarna försummat luftmotstånd och friktion i röret. Det verkliga trycket bör därför vara lägre än 95 kPa. Vi har också antagit att det är samma tryck överallt i röret.

Om röret hålls rakt upp blir potatisens acceleration i röret istället

$$a_{\text{ny}} = a - g = (189{,}7 - 9{,}82) \text{ m/s}^2 = 179{,}9 \text{ m/s}^2.$$

Farten när potatisen lämnar röret:

$$v = \sqrt{2a_{\text{ny}}s} = \sqrt{2 \cdot 179{,}9 \cdot 1{,}1} \text{ m/s} = 19{,}9 \text{ m/s}.$$

Sökta höjden (ovanför rörets mynning) fås ur

$$2as = v^2 - v_0^2 \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{v_0^2}{2a} = -\frac{19{,}9^2}{2 \cdot (-9{,}82)} \text{ m} = 20 \text{ m}.$$

Svar: Lägre än 95 kPa. Potatisen bör komma 20 m ovanför rörets mynning.

Kommentar: Uppgiften kan lösas på olika sätt när väl utgångsfarten (20,4 m/s) är bestämd. Eftersom arbetet som uträttas på potatisen är lika med ökningen av dess rörelseenergi får vi

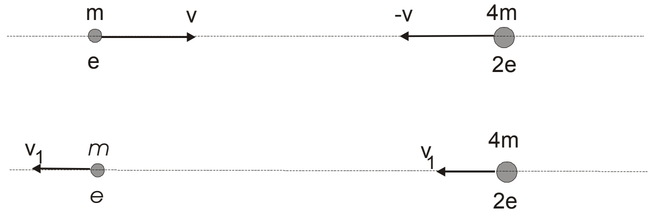
$$(p_0A - pA) \cdot s = \frac{mv^2}{2} \quad \Rightarrow \quad p = p_0 - \frac{mv^2}{2As} = \ldots = 95 \cdot 10^3 \text{ Pa},$$

där s är rörets längd. På liknande sätt får vi i sista delen av uppgiften att

$$(p_0A - pA - mg) \cdot s = mgh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{(p_0 - p)As}{mg} - s = \ldots = 20 \text{ m},$$

där h är potatisens höjd ovanför mynningen när den vänder.

3. [Kval 2004-8] Partiklarna påverkar varandra med lika stora men motsatt riktade krafter. Krafterna är repulsiva eftersom båda partiklarna är positivt laddade. Eftersom partiklarna väger olika mycket kommer de emellertid att få olika accelerationer. Protonens acceleration blir fyra gånger större än alfapartikelns acceleration eftersom dess massa är en fjärdedel av alfapartikelns massa. Det betyder att protonen kommer att byta riktning på sin hastighet för att vid en något senare tidpunkt ha samma hastighet som alfapartikeln har bromsats till. Detta är också den tidpunkt då avståndet mellan partiklarna är minst. Därefter kommer protonen att öka sin hastighet



åt vänster i figuren och alfapartikeln fortsätter att minska sin hastighet. Hastigheterna efter lång tid kan bestämmas med hjälp av rörelsemängdens bevarande och energiprincipen.

Rörelsemängd vid start: $mv - 4mv = -3mv$
Rörelsemängd då de har samma hastighet: $-3mv = mv_1 + vmv_1$
ger $v_1 = -\frac{3v}{5}$

Vilket avstånd har de då? Antag att avståndet är x och använd energiprincipen. Lägesenergin ges av $\int_\infty^x -\frac{k2e^2}{r^2}dr = \frac{2e^2k}{x}$ om lägesenergin är noll vid start och k är konstanten i Coulombs lag. Energiprincipen ger

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{4mv^2}{2} = \frac{2e^2k}{x} + \frac{mv_1^2}{2} + \frac{4mv_1^2}{2}$$

Som med insatt värde $v_1 = -\frac{3v}{5}$ ger

$$\frac{5mv^2}{2} = \frac{2e^2k}{x} + \frac{9mv^2}{10} \text{ eller } x = \frac{5ke^2}{4mv^2}$$

Anmärkning: Med hjälp av energiprincipen och rörelsemängdens bevarande kan sluthastigheterna för partiklarna beräknas. Efter lång tid kommer protonen att ha hastigheten 2,2v och alfapartikeln 0,2v.

Svar: Det minsta avståndet mellan protonen och alfapartikeln är $\frac{5ke^2}{4mv^2}$

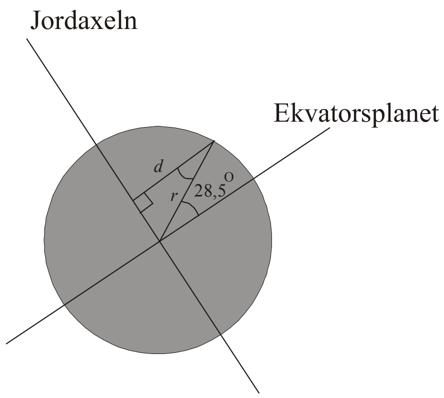
4. [Kval 2003-3] a) Jorden roterar ju mot den uppgående solen i öster. Om jordrotationen skall utnyttjas för att ge bärraketen hastighet i färdriktningen måste raketen skjutas ut i jordens rotationsriktning d v s i rakt östlig riktning.

b) Jordens vinkelhastighet ges av $\omega = \frac{2\pi}{T}$ där $T = 24$ h. På 28,5° latitud är avståndet, d, till jordens rotationsaxel

$$d = r \cdot \cos 28{,}5^\circ = 6370 \cdot \cos 28{,}5^\circ \text{ km} = 5{,}6 \cdot 10^3 \text{ km}$$

om jordradien $r = 6370$ km. Detta motsvarar då hastigheten

$$v = 5{,}6 \cdot 10^3 \cdot \frac{2\pi}{24} \text{ km/h} = 1{,}47 \cdot 10^3 \text{ km/h.}$$



Svar: a) I jordrotationens riktning – d v s rakt österut. b) På latituden 28,5° blir hastigheten $1{,}47 \cdot 10^3$ km/h.

5. [Kval 2003-4] a) Trycket 120 mm Hg räknas om till pascal

$$p = \rho_{\text{Hg}} \cdot g \cdot h = 13600 \cdot 9{,}82 \cdot 0{,}12 \text{ Pa} = 16 \text{ kPa}$$

Vid fotnivån tillkommer trycket av en blodpelare med den ungefärliga höjden 1,2 m för en vuxen person. Detta bidrar med ett partialtryck

$$p_{\text{blod}} = \rho_{\text{blod}} \cdot g \cdot h = 1{,}0 \cdot 10^3 \cdot 9{,}82 \cdot 1{,}2 \text{ Pa} = 12 \text{ kPa}$$

Totaltrycket blir då $p_{\text{total}} = (16 + 12)$ kPa = 28 kPa.

b) För effekten P gäller

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot l}{t} = \frac{pAl}{t} = p \cdot \frac{V}{t}$$

där A är de utgående artärernas tvärsnittsarea och l är den längd blodet drivs framåt av trycket p under tiden t. Blodflödet V/t ges då av

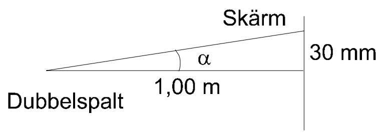
$$\frac{V}{t} = \frac{A \cdot l}{t}$$

Med textens värden fås då

$$P = p \cdot \frac{V}{t} = 0{,}12 \cdot 9{,}82 \cdot 13600 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-3}}{60} \text{ W} = 1{,}3 \text{ W}$$

Svar a) Trycket på fotnivå är 28 kPa b) Hjärtats medeleffekt är 1,3 W.

6. [Kval 2002-5] a) Om spaltavståndet är d gäller för den tionde ordningens maximum $d \cdot \sin\alpha = 10 \cdot \lambda$.



Vinkeln α kan beräknas ur sambandet $\tan\alpha = \frac{30 \text{ mm}}{1000 \text{ mm}} = 0{,}030 \approx \sin\alpha$ eftersom vinkel är liten. Ur detta följer att $d \cdot 0{,}030 = 10 \cdot 600 \cdot 10^{-9}$ m d v s $d = 0{,}20$ mm.

Låt den stråle som har den kortaste vägen fördröjas av filmen. Det betyder att den optiska vägen genom filmen måste vara 10 våglängder längre än den optiska vägen genom motsvarande luftskikt. Optisk väg definieras som $n \cdot d$ där n är brytningsindex och d är geometrisk väg. Detta ger sambandet $10\lambda = n \cdot d - 1 \cdot d$ d v s

$$n = \frac{10 \cdot \lambda}{d} - 1 = \frac{10 \cdot 600 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{20 \cdot 10^{-6} \text{ m}} + 1 = 0{,}30 + 1 = 1{,}30$$

Svar: a) Spaltavståndet är 0,20 mm. b) Brytningsindexet är 1,30

7. [Kval 2002-6] Under bollens stigtid påverkas den av den retarderande tyngdkraften och luftmotståndskraften. Dessa båda krafter samverkar under stigtiden. Under falltiden har de motsatta riktningar eftersom luftmotståndet alltid är riktat mot rörelseriktningen. Detta ger en större retardation, r, under stigtiden än motsvarande acceleration, a, under falltiden.

Eftersom utgångsfarten i båda fallen är noll gäller för fall- respektive stighöjden, h

$$h = \frac{r \cdot t_{\text{stig}}^2}{2} = \frac{a \cdot t_{\text{fall}}^2}{2}$$

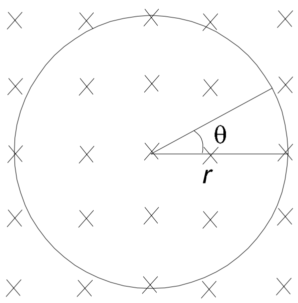
om retardationen respektive accelerationen antas vara konstanta. Detta är dock inte sant eftersom luftmotståndet ökar med farten.

Eftersom $r > a$ måste $t_{\text{stig}} < t_{\text{fall}}$.

Svar: Stigtiden är kortare än falltiden.

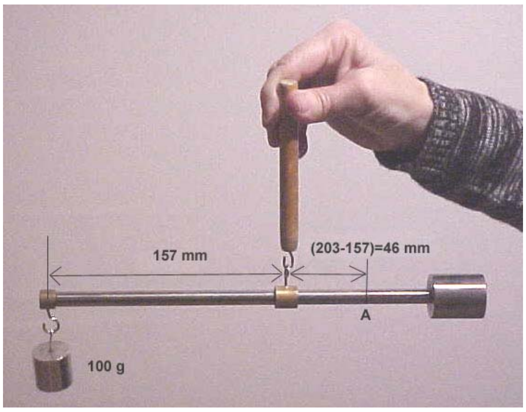
8. [Kval 2001-5] I den roterande metallstaven induceras det en spänning enligt sambandet

$$e = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{B \cdot dA}{dt} = \frac{B \cdot r \cdot r \cdot d\theta}{2dt} = \frac{Br^2}{2} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$
$$= \frac{0{,}2 \cdot 0{,}05^2}{2} \cdot 2 \cdot 2\pi = 0{,}0031 \text{ V} = 3{,}1 \text{ mV}$$



Svar: I den roterande metallstaven induceras det en spänning på 3,1 mV mellan ändpunkterna.

9. [Kval 2001-6] Besmanets tyngdpunkt finns uppenbarligen i punkten A eftersom jämvikt råder då besmanets handtag är placerat i A och besmanet är obelastat. Besmanets massa kan då bestämmas med hjälp av sambandet mellan kraftmomenten.



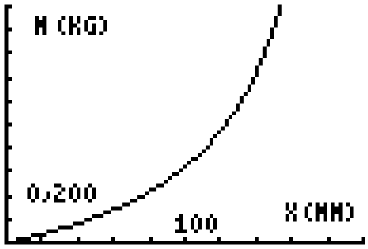
$0{,}100 \cdot g \cdot 157 = m \cdot g \cdot 46$ som ger besmanets massa

$$m = \frac{0{,}100 \cdot 157}{46} = 0{,}341 \text{ kg} = 341 \text{ g.}$$

Belastningens massa, m (kg), som funktion av upphängningspunktens avstånd, x (mm), till punkten A ges av sambandet mellan kraftmomenten vid jämvikt.

$$m \cdot g \cdot (203 - x) = 0{,}341 \cdot g \cdot x \quad \text{som ger} \quad m = \frac{0{,}341 \cdot x}{203 - x}.$$

I detta uttryck gäller att $x < 203$ mm.



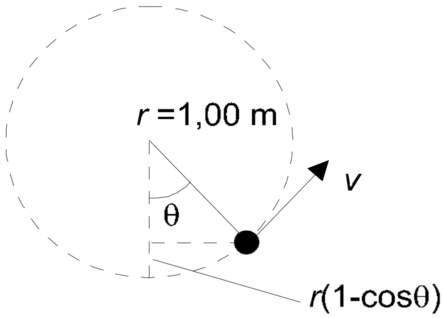
Svar: Besmanet väger 0,34 kg och massan ges som funktion av avståndet av $m = \frac{0{,}341 \cdot x}{203 - x}$.

10. [Kval 2001-7] Eftersom sps"annkraften är noll i banans högsta punkt utgör tyngden mg centripetalkraften i denna punkt. Detta ger $\frac{mv_1^2}{r} = mg$ som ger hastigheten i banans högsta punkt $v_1 = \sqrt{rg} = 3{,}13$ m/s eftersom $r = 1{,}00$ m.

Hastigheten i banans lägsta punkt ges av energiprincipen.

$$\frac{mv_2^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + mg \cdot 2r \quad \text{som ger}$$

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 4rg} = \sqrt{rg + 4rg} = \sqrt{5rg} = 7{,}01 \text{ m/s}$$



Hastigheten i en godtycklig punkt i banan ges som funktion av θ enligt energiprincipen.

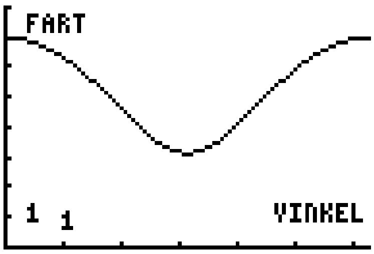
$$\frac{mv^2}{2} + mgr(1 - \cos\theta) = \frac{mv_2^2}{2} \quad \text{som ger}$$

$$v = \sqrt{3rg + 2rg \cdot \cos\theta}.$$

Denna funktion skisseras med hjälp av en grafisk räknare för $r = 1{,}00$ m. Den maximala farten 7,01 m/s fås för vinkeln θ lika med noll och den minsta farten 3,13 m/s fås för vinkeln $\theta = \pi$.

Vi vet att

$$v = r \cdot \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{3rg + 2rg \cdot \cos\theta} \quad \text{som ger}$$



$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r}\sqrt{3rg + 2rg \cdot \cos\theta} \quad \text{eller}$$
$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{3rg + 2rg \cdot \cos\theta}} \quad \text{eller}$$
$$dt = \frac{r \cdot d\theta}{\sqrt{3rg + 2rg \cdot \cos\theta}}$$

som integreras under periodtiden T.

$$T = \int_0^T 1 \cdot dt = \sqrt{r}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{3g + 2g \cdot \cos\theta}}$$

Denna integral kan inte lösas algebraiskt. Numerisk integration med hjälp av räknaren ger $T = 1{,}288$ s för $r = 1{,}00$ m

(Integralen kan alternativt beräknas numeriskt med hjälp av ett diagram.)

Svar: Kulans fart ges av uttrycket $v = \sqrt{3rg + 2rg \cdot \cos\theta}$. Den lägsta farten är 3,13 m/s och den högsta farten är 7,01 m/s om r = 1,00 m. Omloppstiden är 1,29 s.