

## Anisotropisk friktion (10 poäng)

Friktionskrafter är inte alltid isotropa, alltså riktningsoberoende. Ofta beror en friktionskrafts storlek och riktning på kroppens rörelseriktning. T.ex. kan friktionsanisotropi uppstå på grund av "spår" i en viss riktning på kroppens kontaktyta (friktionskoefficienten för ekträ mot ekträ är t.ex. 0.48 längs fibrerna, resp. 0.34 på tvärs). Friktionsanisotropi kan leda till ovanliga egenskaper hos den rörelse som studeras i denna uppgift.

### Vad du behöver veta om anisotropisk friktion

Antag att en yta består av ett anisotropt material. I en populär modell för anisotrop friktion antas att det finns vinkelräta axlar  $X$  och  $Y$  (kallade *primära*) så att friktionskraften  $\vec{F}$  som verkar på en kropp beror på kroppens rörelse som

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{|N|}{|v|} \mu_x v_x \\ F_y &= -\frac{|N|}{|v|} \mu_y v_y \end{aligned} \quad (1)$$

där  $F_x$  och  $F_y$  är friktionskrafternas komponenter,  $N$  är normalkraften som verkar på kroppen,  $v_x$  och  $v_y$  är komponenterna för hastighetsvektorn  $\vec{v}$ , och  $\mu_x$  och  $\mu_y$  friktionskoefficienterna längs de primära axlarna.

I vad som följer är det underförstått att planets koordinataxlar sammanfaller med de primära axlarna. Friktionskoefficienterna är  $\mu_x = 0,75$  och  $\mu_y = 0,5$  om inget annat sägs.

I del A och B kan en kropp betraktas som punktformig. Planet där rörelsen sker är horisontellt i hela uppgiften.

Ange ett numeriskt svar närhelst möjligt.

### Del A. Rörelse på en horisontell yta. (4.0 poäng)

**A.1** Vilken vinkel  $\alpha_1$  ska kroppens hastighetsvektor bilda mot  $X$ -axeln, för att absolutvärdet av effekten från friktionskraften ska vara maximal? 0.5pt

**A.2** Vilken vinkel  $\alpha_2$  ska kroppens hastighetsvektor bilda mot  $X$ -axeln, för att absolutvärdet av effekten från friktionskraften ska vara 1,2 gånger mindre än den maximala? 0.5pt

**A.3** Låt den initiala hastigheten ha komponenterna  $v_{0x} = 1$  m/s och  $v_{0y} = 1$  m/s. Efter en viss tid har hastighetskomponenten längs  $Y$ -axeln sjunkit till  $v_{1y} = 0,25$  m/s. Vad är hastighetens belopp i detta ögonblick? 1.0pt

**A.4** Låt hastighetens belopp vara  $v_2 = 1.0$  m/s. Vilken vinkel  $\alpha_3$  mot  $X$ -axeln ska hastighetsvektorn ha för att banans krökningsradie ska vara minimal? Vad blir denna radie? Tyngdaccelerationen ges av  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup>. 1.0pt

- A.5** Skissa, i ett enkelt diagram i  $XY$ -planet, banorna för en kropp som startas vid vinklarna  $\alpha_4 = \pi/6$  och  $\alpha_5 = \pi/3$ , för ovan specificerade friktionskoefficienter. Hastigheternas initiala belopp är samma. Samma uppgift för friktionskoefficienterna  $\mu_x = 0,4$  och  $\mu_y = 0,7$ . 1.0pt

### Del B. Villkor för kroppen att börja röra sig (2.0 poäng)

- B.1** En kropp med massan  $m$  befinner sig i vila i origo. En kraft börja verka på den i en vinkel  $\alpha$  mot  $X$ -axeln. Kraftens belopp  $F(t) = \gamma t$  växer linjärt med tiden. Beräkna hur tidpunkten då kroppen börjar röra sig beror på  $\alpha$ . Ignorera stagnationsfenomenet. 2.0pt

### Del C. Cirkulär rörelse (4.0 poäng)

Två identiska punktmassor  $m$  är kopplade via en masslös osträckbar stav med längden  $L = 1$  m. Detta system ligger på en yta med anisotrop friktion. Staven är parallell med  $Y$ -axeln och rör inte ytan. En av massorna får en begynnelsehastighet vinkelrät mot staven.

- C.1** Hitta beroendet mellan hastigheten  $v$  och stavens rotationsvinkel  $\varphi$ , givet en initial hastighet  $v_0$ , under antagandet att den andra punktmassan förblir i vila. 1.5pt
- C.2** Beräkna det största värdet på begynnelsehastigheten  $v_{0\max}$  så att den andra punktmassan förblir i vila. 1.5pt
- C.3** Hur långt kommer punktmassan att färdas innan den stannar helt, givet att begynnelsehastigheten är  $v_{0\max}$ ? 1.0pt